

脉冲向量时滞双曲型方程的 H -振动性*

罗李平¹, 俞元洪²

(1. 衡阳师范学院数学系, 湖南, 衡阳 421008;
2. 中国科学院应用数学研究所, 北京 100080)

摘要: 对一类脉冲向量时滞双曲型偏微分方程的振动性进行了研究, 利用 Domslak 引进的 H -振动 (H 是 $\mathbf{R}^M$ 中的单位向量) 的概念及内积降维的方法, 将多维振动问题化为一维脉冲时滞微分不等式不存在最终正解的问题, 获得了该类方程在 Robin 边值条件下所有解 H -振动的若干充分判据。

关键词: 脉冲; 时滞; 双曲型偏微分方程; H -振动

中图分类号: O175.27 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 06-0001-04

近年来, 由于偏泛函微分方程振动理论在工程学、物理学和生物学等学科领域中有广泛的应用, 对其研究取得了极大的发展, 罗李平、王培光等发表了一些很好的研究成果^[1-3], 这为更好地研究向量偏泛函微分方程作了准备。1970年, Domslak^[4]在研究向量常微分方程时首次引入了 H -振动的概念, 这里 H 是 $\mathbf{R}^M$ 中的单位向量。关于这一概念及其应用, 1996年 Courant 和 Hilbert^[5]作了很好的阐述。最近, Minchev 和 Yoshida^[6]研究了一类具泛函变元的向量抛物型偏微分方程解的 H -振动性; 李伟年等^[7]研究了一类具偏差变元的向量双曲型偏微分方程解的 H -振动性。王宁等^[8]研究了一类具分布中立型系数的向量双曲型偏泛函微分方程解的 H -振动性。罗李平^[9]研究了一类具连续分布滞量的中立型向量双曲偏泛函微分方程的 H -振动性。但关于带脉冲的向量偏微分方程解的 H -振动性研究还很少见, 目前仅见李伟年等^[10]研究了一类脉冲向量时滞抛物型偏微分方程解的 H -振动性。而关于脉冲向量双曲型偏微分方程解的振动性研究, 就笔者所知, 至今国内外尚未见报道。本文将着手讨论如下的一类脉冲向量时滞双曲型偏微分方程

$$\begin{cases} U_u(t, x) = \sum_{i=0}^m a_i(t) \Delta U(t - \tau_i, x) - \\ \sum_{j=0}^n p_j(t, x) U(t - \sigma_j, x), (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega \equiv G, t \neq t_k \\ U(t_k^+, x) - U(t_k^-, x) = b_k U(t_k, x), k = 1, 2, \dots \\ U_i(t_k^+, x) - U_i(t_k^-, x) = c_k U_i(t_k, x), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

解的 H -振动性, 其中 $U(t, x) \in C^2([t_0, \infty) \times \Omega;$

$\mathbf{R}^M)$ 是向量函数, Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有逐片光滑边界的有界域, Δ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 N 维 Laplacian 算子, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 。

考虑 Robin 边值条件:

$$\partial_\nu U(t, x) + \beta(t, x) U(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \partial\Omega, t \neq t_k \quad (2)$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\beta(t, x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega, \mathbf{R}_+)$ 。

在本文中, 我们总假设下列条件成立:

(H_1) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 是固定点列且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty;$$

(H_2) τ_i, σ_j 为正常数, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n, \tau_0 = 0, \sigma_0 = 0$ 且 $b_k, c_k > -1, k = 1, 2, \dots$;

(H_3) $a_i(t) \in PC(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+), p_j(t, x) \in PC(\mathbf{R}_+ \times \bar{\Omega}, \mathbf{R}_+), P_j(t) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \{p_j(t, x)\}, i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$, 这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类: 仅在 $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 为第一类间断点, 但在 $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 左连续。

定义 1 向量函数 $U(t, x) \in C^2([t_0, \infty) \times \Omega; \mathbf{R}^M)$ 称为边值问题 (1) - (2) 的解, 若 $U(t, x)$ 关于 x 二次连续可微, 关于 t 是以 $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 为第一类间断点的分片连续函数, $U(t_k, x) = U(t_k^-, x), U_i(t_k, x) = U_i(t_k^-, x), k = 1, 2, \dots$, 且 $U(t, x)$ 在 G 上满足方程 (1) 及在 $\mathbf{R}_+ \times \partial\Omega$ 上满足边值条件 (2)。

定义 2 边值问题 (1) - (2) 的解 $U(t, x)$ 称为 H -振动的, 若对 $\mathbf{R}^M$ 中的单位向量 H 及任意大

* 收稿日期: 2008-04-21

基金项目: 湖南省教育厅科研计划基金资助项目 (07C164); 国家自然科学基金天元基金资助项目 (10626033)

作者简介: 罗李平 (1964年生), 男, 教授; E-mail: luo8486659@163.com

的 $T \geq 0$, 存在一点 $(t_0, x_0) \in [T, \infty) \times \Omega$, 使得内积 $\langle U(t_0, x_0), H \rangle = 0$.

为叙述方便, 在本文中引入如下记号

$$U_H(t, x) = \langle U(t, x), H \rangle, W(t) = \int_{\Omega} U_H(t, x) dx$$

为了得到本文的主要结果, 引入如下三个引理:

引理 1^[11] 设 $y(t) \in C^2([t_0, \infty), \mathbf{R})$ 且 $y(t) > 0, y'(t) > 0, y''(t) < 0, t \geq t_0$, 则对任意的 $\theta \in (0, 1)$, 存在 $t_1 \geq t_0$, 使当 $t \geq t_1$ 时, 有 $y(t) \geq \theta t y'(t)$.

引理 2^[12] 设 $a(t), b(t)$ 是 $\mathbf{R}_+$ 上的局部可积函数且 $b(t) \geq 0; 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, y(t_k) = y(t_k^-); b_k > -1, k = 1, 2, \dots; \tau$ 为正常数. 若

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t b(s) \exp\left(\int_{s-\tau}^s a(r) dr\right) \prod_{s-\tau \leq t_k < s} (1 + b_k)^{-1} ds > \frac{1}{e}$$

则脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau) \leq 0 \\ t \geq 0, t \neq t_k, k = 1, 2, \dots \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = b_k y(t_k), k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

无最终正解.

引理 3 设 H 是 $\mathbf{R}^M$ 中的单位向量. 若 $U(t, x)$ 是方程 (1) 的解, 且 $U_H(t, x)$ 的符号最终确定, 则 $U_H(t, x)$ 是纯量脉冲时滞双曲型偏微分不等式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_H(t, x)}{\partial t^2} \leq \sum_{i=0}^m a_i(t) \Delta U_H(t - \tau_i, x) - \sum_{j=0}^n P_j(t) U_H(t - \sigma_j, x), (t, x) \in G, t \neq t_k \\ U_H(t_k^+, x) - U_H(t_k^-, x) = b_k U_H(t_k, x) \\ k = 1, 2, \dots \\ \frac{\partial U_H(t_k^+, x)}{\partial t} - \frac{\partial U_H(t_k^-, x)}{\partial t} = c_k \frac{\partial U_H(t_k, x)}{\partial t} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

的解.

证明 设 $U(t, x)$ 是方程 (1) 的解且 $U_H(t, x)$ 最终为正 (对于 $U_H(t, x)$ 最终为负的情形, 令 $V_H(t, x) = -U_H(t, x)$, 类似可证明之).

当 $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, 将方程 (1) 两边与 H 作内积, 由内积性质得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_H(t, x)}{\partial t^2} &= \sum_{i=0}^m a_i(t) \Delta U_H(t - \tau_i, x) - \sum_{j=0}^n p_j(t, x) U_H(t - \sigma_j, x) \\ &\quad (4) \end{aligned}$$

由 (H_3) 有

$$\begin{aligned} p_j(t, x) U_H(t - \sigma_j, x) &\geq P_j(t) U_H(t - \sigma_j, x) \\ j &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

因此由 (4) - (5) 两式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_H(t, x)}{\partial t^2} &\leq \sum_{i=0}^m a_i(t) \Delta U_H(t - \tau_i, x) - \sum_{j=0}^n P_j(t) U_H(t - \sigma_j, x) \\ &\quad (6) \end{aligned}$$

当 $t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, 由方程 (1) 中的脉冲条件可知

$$U_H(t_k^+, x) - U_H(t_k^-, x) = b_k U_H(t_k, x) \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_H(t_k^+, x)}{\partial t} - \frac{\partial U_H(t_k^-, x)}{\partial t} = c_k \frac{\partial U_H(t_k, x)}{\partial t} \quad (8)$$

因此由 (6) - (8) 三式可知 $U_H(t, x)$ 是偏微分不等式 (4) 的解. 证毕.

相应于边值条件 (2), 考虑纯量边值条件:

$$U_H(t, x) = 0, (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \partial\Omega, t \neq t_k \quad (2')$$

利用引理 3, 容易得到

定理 1 设 H 是 $\mathbf{R}^M$ 中的单位向量. 若纯量脉冲时滞双曲型偏微分不等式 (3) 在边值条件 (2') 下无最终正解, 则边值问题 (1) - (2) 的任意解 $U(t, x)$ 在 G 内 H -振动.

定理 2 若脉冲时滞微分不等式

$$\begin{cases} W''(t) + P_0(t)W(t) + \sum_{j=1}^n P_j(t)W(t - \sigma_j) \leq 0 \\ t \geq 0, t \neq t_k \\ W(t_k^+) - W(t_k^-) = b_k W(t_k), k = 1, 2, \dots \\ W'(t_k^+) - W'(t_k^-) = c_k W'(t_k), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

无最终正解, 则边值问题 (1) - (2) 的任意解 $U(t, x)$ 在 G 内 H -振动.

证明 据定理 1 知, 只需要证明在定理 2 的条件下, 偏微分不等式 (3) 在边值条件 (2') 下无最终正解即可. 假设偏微分不等式 (3) 在边值条件 (2') 下存在最终正解 $U_H(t, x), (t, x) \in [T, \infty) \times \Omega, T \geq 0$. 当 $t \geq T, t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, (3) 式两边在区域 Ω 上关于 x 积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} U_H(t, x) dx &\leq \sum_{i=0}^m a_i(t) \int_{\Omega} \Delta U_H(t - \tau_i, x) dx - \sum_{j=0}^n P_j(t) \int_{\Omega} U_H(t - \sigma_j, x) dx \\ &\quad (10) \end{aligned}$$

由 Green 公式及边值条件 (2') 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta U_H(t - \tau_i, x) dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U_H(t - \tau_i, x)}{\partial \nu} dS = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \beta(t - \tau_i, x) U_H(t - \tau_i, x) dS \leq 0 \\ i &= 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (11)$$

其中 dS 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

于是由 (10) - (11) 两式可得

$$\begin{aligned} W''(t) + P_0(t)W(t) + \sum_{j=1}^n P_j(t)W(t - \sigma_j) &\leq 0 \\ &\quad (12) \end{aligned}$$

当 $t \geq T, t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, 由 (3) 式中的脉冲条件可得

$$\int_{\Omega} U_H(t_k^+, x) dx - \int_{\Omega} U_H(t_k^-, x) dx = b_k \int_{\Omega} U_H(t_k, x) dx$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U_H(t_k^+, x)}{\partial t} dx - \int_{\Omega} \frac{\partial U_H(t_k^-, x)}{\partial t} dx = c_k \int_{\Omega} \frac{\partial U_H(t_k, x)}{\partial t} dx$$

即

$$W(t_k^+) - W(t_k^-) = b_k W(t_k) \quad (13)$$

$$W'(t_k^+) - W'(t_k^-) = c_k W'(t_k) \quad (14)$$

因此由 (12) - (14) 三式可知 $W(t)$ 是微分不等式 (9) 的一个最终正解, 而这与定理 2 的题设矛盾。证毕。

利用定理 2 及引理 1, 结合引理 2, 我们可以得到下列判别边值问题 (1) - (2) 的所有解 H -振动的应用便利的显式充分条件。

定理 3 若存在某一个 $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, 对任意的 $0 < \theta < 1$, 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma_{j_0}}^t \theta P_{j_0}(s)(s - \sigma_{j_0}) \exp\left(\int_{s-\sigma_{j_0}}^s \theta r P_0(r) dr\right) ds > \frac{1}{e} \prod_{s-\sigma_{j_0} \leq t_k < s} (1 + c_k)^{-1} \quad (15)$$

则边值问题 (1) - (2) 的任意解在 G 内 H -振动。

证明 假设问题 (1) - (2) 有一个非 H -振动解 $U(t, x)$, 则 $U_H(t, x)$ 是问题 (3), (2') 的一个非振动解。不失一般性, 不妨设 $U_H(t, x)$ 最终为正, $(t, x) \in [T, \infty) \times \Omega, T \geq 0$ (对于 $U_H(t, x)$ 最终为负的情形, 令 $V_H(t, x) = -U_H(t, x)$, 类似可证明之)。

当 $t \geq T, t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, 类似于定理 2 的证明可得式 (12)。由 (12) 易知, $W''(t) < 0, t \geq T$, 于是可证得 $W'(t) > 0, t \geq T_1$ 。事实上, 倘若不然, 则存在 $T_1 > T$, 使得 $W'(T_1) \leq 0$ 。当 $t \geq T_1$ 时, 有 $W'(t) \leq W'(T_1)$ 。对 t 从 T_1 到 t 积分, 有 $W(t) \leq W(T_1) + W'(T_1)(t - T_1)$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = -\infty$, 而这与 $W(t) > 0$ 矛盾。于是由 (12) 式有

$$W''(t) + P_0(t)W(t) + P_{j_0}(t)W(t - \sigma_{j_0}) \leq 0 \quad (16)$$

因此, 对定理所给条件中的 θ , 由引理 1 知, 存在 $T_1 \geq T$, 有 $W(t) \geq \theta t W'(t), t \geq T_1$ 。令 $Z(t) = W'(t)$, 则由 (16) 式可得

$$Z'(t) + \theta t P_0(t)Z(t) + \theta P_{j_0}(t)(t - \sigma_{j_0})Z(t - \sigma_{j_0}) \leq 0 \quad (17)$$

当 $t \geq T, t = t_k, k = 1, 2, \dots$ 时, 类似于定理 2 的证明可得式 (14)。于是由 (14) 式可得

$$Z(t_k^+) - Z(t_k^-) = c_k Z(t_k) \quad (18)$$

因此可知 $Z(t)$ 是 (17) - (18) 式的一个最终正

解。但据条件 (15) 及引理 2 知, 问题 (17) - (18) 无最终正解, 矛盾。证毕。

注 若用下面条件

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t b(s) \exp\left(\int_{s-\tau}^s a(r) dr\right) \prod_{s-\tau \leq t_k < s} (1 + b_k)^{-1} ds > 1$$

代替引理 2 中的极限条件 (参见文 [12] 中的定理 3), 则还可以得到如下的判别边值问题 (1) - (2) 的所有解 H -振动的充分条件。

定理 4 若存在某一个 $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, 对任意的 $0 < \theta < 1$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\sigma_{j_0}}^t \theta P_{j_0}(s)(s - \sigma_{j_0}) \exp\left(\int_{s-\sigma_{j_0}}^s \theta r P_0(r) dr\right) ds > 1 \prod_{s-\sigma_{j_0} \leq t_k < s} (1 + c_k)^{-1}$$

则边值问题 (1) - (2) 的任意解在 G 内 H -振动。

参考文献:

- [1] 罗李平. 具连续分布滞量的高阶非线性偏泛函微分方程的强迫振动性[J]. 工程数学学报, 2007, 24(1): 133 - 137
- LUO L P. Forced oscillation of high-order nonlinear partial functional differential equations with continuous distribution delay[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(1): 133 - 137.
- [2] WANG P G, WU Y H, CACCETTA L. Oscillation criteria for boundary value problems of high-order partial functional differential equations[J]. J Comput Appl Math, 2007, 206(1): 567 - 577.
- [3] 罗李平, 高正晖, 欧阳自根. 具连续分布滞量的非线性中立型抛物方程的振动性[J]. 应用数学, 2006, 19(3): 651 - 655.
- LUO L P, GAO Z H, OUYANG Z G. Oscillation of nonlinear neutral parabolic partial functional differential equations with continuous distribution delay[J]. Mathematica Applicata, 2006, 19(3): 651 - 655.
- [4] DOMSLAK J I. On the oscillation of solutions of vector differential equations[J]. Soviet Math Dokl, 1970, 11: 839 - 841.
- [5] COURANT R, HILBERT D. Methods of Mathematical Physics, Vol. I[M]. New York: Interscience, 1996.
- [6] MINCHEV E, YOSHIDA N. Oscillation of solutions of vector differential equations of parabolic type with functional arguments[J]. J Comput Appl Math, 2003, 151(1): 107 - 117.
- [7] LI W N, HAN M A, Meng F W. H-oscillation of solutions of certain vector hyperbolic differential equations with deviating arguments[J]. Appl Math Comput, 2004, 158(3): 637 - 653.
- [8] 王宁, 王培光, 孙晓玲. 一类具分布式偏差变元的双曲型向量泛函微分方程解的 H -振动性[J]. 应用泛函

- 分析学报, 2007, 9(1): 63 – 69.
- WANG N, WANG P G, SUN X L. H – Oscillation of solutions of certain vector hyperbolic functional differential equations with distributed deviating arguments [J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2007, 9(1): 63 – 69.
- [9] 罗李平. 具连续分布滞量的中立型向量双曲偏泛函微分方程的 H – 振动性 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(11): 158 – 162.
- LUO L P. H – Oscillation of neutral vector parabolic partial functional differential equations with continuous distribution delays [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(11): 158 – 162.
- [10] LI W N, HAN M A. Oscillation of solutions for certain impulsive vector parabolic differential equations with delays [J]. J Math Anal Appl, 2007, 326(1): 363 – 371.
- [11] PHILOS CH G. A new criterion for oscillatory and asymptotic behavior of delay differential equations [J]. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Math Astron Phys, 1981, 29(4): 367 – 370.
- [12] YAN J R, KOU C H. Oscillation of solutions of impulsive delay differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2001, 254(2): 358 – 370.

H -oscillation of Impulsive Vector Delay Hyperbolic Equations

LUO Li-ping¹, YU Yuan-hong²

(1. Department of Mathematics, Hengyang Normal University, Hunan 421008, China;

2. Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080, China)

Abstract: The oscillations of a class of impulsive vector hyperbolic partial differential equations with delays are studied. Based on changing the multi-dimensional oscillation problems into the problems of which one-dimensional impulsive delay differential inequalities haven't eventually positive solution by using the concept of H -oscillation introduced by Domslak and the method of reducing dimension with scalar product. Some sufficient criteria for H -oscillation of all solutions of the equations are obtained under Robin boundary value condition, where H is a unit vector of $\mathbb{R}^m$.

Key words: impulse; delay; hyperbolic partial differential equation; H -oscillation